

## MATAL. Matrices et applications linéaires

### QCOP MATAL.1

3. On peut prendre  $A = I_n$  et  $B$  une matrice de rang  $n$  qui ne soit pas l'identité (d'après la question précédente).

### QCOP MATAL.2

1. Résultat.  $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) : A = PBP^{-1}$ .
2. Raisonner par récurrence sur la relation «  $A = PBP^{-1}$  » pour montrer que  $A^k = PB^kP^{-1}$ .
3. De même, montrer que  $Q(A) = PQ(B)P^{-1}$ .

### QCOP MATAL.3

1. Résultat. Les matrices  $A^k$  et  $B^k$  sont semblables.
2. Les matrices  $A^{k_A}$  et  $B^{k_A}$  sont semblables. Or, une matrice semblable à la matrice nulle est nulle (à comprendre). Comme  $B$  est diagonale,  $B^{k_A}$  est la matrice diagonale contenant les coefficients de  $B$  à la puissance  $k_A$ .
3. **a)** En écrivant la relation «  $\lambda AX + \mu X = 0_{n,1}$  », et en multipliant par  $A$ , on montre que  $\mu = 0$ . Ensuite,  $\lambda = 0$ . On utilise bien que  $X \notin \text{Ker}(A)$ , donc  $X \neq 0_{2,1}$  et  $AX \neq 0_{2,1}$ .  
**b)** Par un argument de dimension, la famille  $(AX, X)$  est une base de  $M_{2,1}(\mathbb{K})$ .  
 On peut donc écrire la matrice de  $A$  dans la base  $(AX, X)$ .

*Cette question est importante pour la deuxième année : on a montré que toute matrice nilpotente est semblable à  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Cela permet de trigonaliser les matrices  $2 \times 2$ .*

### QCOP MATAL.4

On note  $C_1, \dots, C_n \in M_{n,1}(\mathbb{K})$  les colonnes de  $A$ .

1. Résultat.  $\text{rg}(A) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_n)$ .
2. **a)** Comme  $\text{rg}(A) = 1$ , par définition, il existe une colonne  $C \in M_{n,1}(\mathbb{K})$  et des scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tels que  $C_1 = \alpha_1 C, \dots, C_n = \alpha_n C$ . On pose ensuite  $L = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n)$ .  
**b)** Il faut montrer que  $LC = \text{Tr}(A)$ . On peut écrire les coefficients de  $C$  explicitement pour le comprendre.  
**c)** Raisonner par récurrence sur la question précédente. Distinguer les cas  $p = 0$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ .

## QCOP MATAL.5

- ◆ Montrer que  $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \{0_E\}$ .

◆ Montrer que  $E = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$  en raisonnant par analyse-synthèse.
- Considérer une base de  $E$  adaptée à la somme directe  $E = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ .
- ◆ En notant  $\mathcal{B}$  la base précédemment déterminée et  $M := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ , on a  $\text{Tr}(p) = \text{Tr}(M)$ .

◆ Il apparaît ensuite que  $\text{Tr}(M) = \dim(\text{Ker}(p - \text{Id}_E))$ .

◆ On montre enfin, en utilisant la formule du rang, que  $\dim(\text{Ker}(p - \text{Id}_E)) = \dim(\text{Im}(\varphi))$ .

## QCOP MATAL.6

- ◆ *Méthode matricielle.* Faire des opérations élémentaires sur  $A$  pour faire apparaître  $J_r$ .

◆ *Méthode géométrique.* Soit  $u$  l'application linéaire canoniquement associée. Soit  $(e_{r+1}, \dots, e_p)$  une base de  $\text{Ker}(u)$ . Construire une base  $B := (e_1, \dots, e_p)$  de  $\mathbb{K}^p$  (théorème de la base incomplète) et justifier que  $(u(e_1), \dots, u(e_r))$  est de rang  $r$ . On peut donc construire une base  $C$  de  $\mathbb{K}^n$  contenant  $u(e_1), \dots, u(e_r)$  et  $\text{Mat}_{B,C}(u) = J_r$ . On conclut par la formule de changement de base.
- Transposer la relation donnée par l'équivalence entre  $A$  et  $J_r$ .
- Utiliser la transitivité de l'équivalence matricielle (qui est une relation d'équivalence).

## QCOP MATAL.7

- a) Utiliser la relation «  $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$  ».

$$2. \text{ a) } \underline{\text{Résultat.}} \text{Mat}_{(1, X, \dots, X^n)}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & (0) \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 2 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & n-1 \\ (0) & & & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{K})$$

b) Résultat.  $\text{Tr}(D) = 0$ .

## QCOP MATAL.8

- a) Résultat.  $\text{Mat}_{(1, X, \dots, X^n)}(\varphi) = \left( \binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$ .

b) Résultat.  $\varphi^{-1} : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X-1). \end{cases}$

c) Résultat.  $M^{-1} = \left( (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$ .