# MAT. Matrices

## QCOP MAT.1

**3.** **b)** Prendre $A, B, C$ des matrices élémentaires de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

**c)** Résultat. $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(A)$.

## QCOP MAT.2

**1.** **a)** Résultat. $(M^\top M)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} M_{k,i} M_{k,j}$.

**b)** Montrer que $\mathrm{Tr}(M^\top M)$ est une somme de termes positifs.

**2.** La matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ fournit un contre-exemple.

**3.** En notant $\overline{M} := (\overline{M_{i,j}})_{i,j}$, on pourrait montrer que

$$\mathrm{Tr}(M^\top \overline{M}) = 0 \quad \iff \quad M = 0_n.$$

## QCOP MAT.3

**3.** **a)** Résultat. $M = \dfrac{M + M^\top}{2} + \dfrac{M - M^\top}{2}$.

**b)** Une matrice symétrique et antisymétrique vérifie $M^\top = M = -M$ donc $2M = 0_n$.

*Lorsque le formalisme des espaces vectoriels aura été vu, on pourra dire que l'on a montré que $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ sont en somme directe dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.*

## QCOP MAT.4

**3.** **a)** Prendre deux matrices qui ne commutent pas.

**b)** Résultat. $AB \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K}) \quad \iff \quad AB = BA$.

## QCOP MAT.5

**2.** On a $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathrm{I}_n$, $\mathrm{I}_n^\top = \mathrm{I}_n$ et $MN^\top = N^\top M^\top$.

**3.** Conséquence directe de la question précédente. Il s'agit de montrer que $\left(A^{-1}\right)^\top = A^{-1}$.

## QCOP MAT.7

**2.** **a)** Résultat. $a_0 \neq 0$.

**b)** Résultat. $A^{-1} = -\dfrac{1}{a_0}\left(a_1 \mathrm{I}_n + a_2 A + \cdots + a_p A^{p-1}\right)$.