QCOP • SUP • Indications et éléments de réponse

REEL. Nombres réels

QCOP REEL.1

1. a) Résultat. $\lfloor x \rfloor = \max\big(\{n \in \mathbb{Z} \quad | \quad n \leqslant x\}\big)$.
   b) Résultat. $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
   c) Utiliser ce qui précède.
2. Utiliser l'encadrement précédent et le fait que le nombre considéré est un entier.

QCOP REEL.2

1. Résultat. $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
2. a) Remarquer que $\lfloor x \rfloor \geqslant \lfloor y \rfloor + 1$.
   b) On a obtenu : $\lfloor x \rfloor > \lfloor y \rfloor \implies x > y$.
3. Prendre $x = 1$ et $y = 1{,}5$ par exemple.
4. Dans ce cas, $\lfloor y \rfloor = y$ et on a toujours $\lfloor x \rfloor \leqslant x$.

QCOP REEL.3

1. Résultat. $x_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.
2. Résultat. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a_{x,\varepsilon} \in A : \quad |x - a_{x,\varepsilon}| \leqslant \varepsilon$.
3. a) Raisonner par analyse-synthèse en utilisant notamment le logarithme. On peut aussi raisonner avec l'inégalité de Bernoulli.
   b) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, prendre N_ε donné par la question précédente et $a_{x,\varepsilon} = x_{N_\varepsilon}$.
4. On a $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

QCOP REEL.4

2. ♦ (i) $\implies$ (ii) : poser $m := \dfrac{x+y}{2}$ (milieu de $[x, y]$) et $\varepsilon := \dfrac{|x-y|}{2} = |x - m| = |y - m|$, puis appliquer (i) à m et $\dfrac{\varepsilon}{2}$.
   ♦ (ii) $\implies$ (iii) : idem avec $\dfrac{\varepsilon}{4}$.
   ♦ (iii) $\implies$ (i) : pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, appliquer (iii) avec $x \leftarrow x - \varepsilon$ et $y \leftarrow x + \varepsilon$.
3. a) Résultat. $a + b \notin \mathbb{Q}$.
   b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x + \sqrt{2} \leqslant q \leqslant y + \sqrt{2}$ donc $x \leqslant q - \sqrt{2} \leqslant y$, avec $q - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.