SER. Séries numériques

QCOP SER.1

3. ♦ On a $\arctan(12n!) \longrightarrow \frac{\pi}{2} \neq 0$.

   ♦ On a $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0$ mais
$$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(N+1) \longrightarrow +\infty.$$
   Résultat. Les deux séries divergent.

QCOP SER.2

1. Résultat. La suite $(U_N)_N$ est croissante.
2. Utiliser le théorème de la limite monotone.
3. On peut utiliser $u_n := -\frac{1}{n}$.

QCOP SER.3

1. Résultat. $a^n \longrightarrow 0 \iff |a| < 1$.
2. Résultat. $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.
3. Calculer la limite de $\sum_{k=0}^{n} a^k$, en traitant séparément la cas $a = 1$.
4. Résultat. $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n = \frac{a}{1-a}$.

QCOP SER.4

2. Il s'agit de voir que $u_{n+2} - 2\,u_{n+1} + u_n = u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n)$.
   En posant $v_n := u_{n+1} - u_n$, on peut utiliser ce qui précède avec la suite $(v_n)_n$.

QCOP SER.6

4. On peut utiliser $u_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

QCOP SER.7

2. Utiliser la définition de $o(\cdot)$ version « à partir d'un certain rang ».

3. Utiliser ce qui précède. Le résultat de cette question doit être un réflexe : si $|u_n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $\sum_n |u_n|$ converge.

QCOP SER.8

2. Utiliser la définition de $O(\cdot)$ version « à partir d'un certain rang ».

3. Utiliser ce qui précède.

QCOP SER.9

1. Utiliser la décroissance de f sur les segment $[k, k+1]$ de façon à encadrer $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ par deux valeurs de f. On peut ensuite sommer ces inégalités de façon à faire apparaître $\sum_{k=n}^{m} f(k)$.

2. **a)** La formule précédent nous permet de minorer H_n par une quantité de l'ordre de $\ln(n)$. Puisque $\ln(n) \longrightarrow +\infty$, on obtient la divergence par minoration.

b) Montrer, toujours à l'aide de l'inégalité précédente, que $\frac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} \longrightarrow 1$.

QCOP SER.10

1. Utiliser la contraposée de « $\sum_n u_n$ converge $\implies$ $u_n \longrightarrow 0$ ».

QCOP SER.11

3. On peut utiliser $u_n := \frac{(-1)^n}{n}$.