TRGCPLX. Trigonométrie et nombres complexes

QCOP TRGCPLX.2

1. Résultat. $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad |z| = 1\} = \left\{e^{i\theta} \ ; \ \theta \in \mathbb{R}\right\}$.

2. Additionner $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

3. Résultat.
$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad 1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$
$$e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 2\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \quad e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} = 2i\sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

QCOP TRGCPLX.3

2. a) Résultat. $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 - e^{i(n+1)\theta} = -2i\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}$.

b) Il s'agit d'une somme géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$.

Résultat. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{in\frac{\theta}{2}}$.

3. Prendre la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$.

Résultat. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)$.

QCOP TRGCPLX.4

2. b) Résultat. $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$ et $\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$.